

УДК 517.5

**Е.А. Севостьянов** (Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина)

**Є.О. Севостьянов** (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк, Україна)

**E.A. Sevost'yanov** (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Donetsk, Ukraine)

**О теоремах сходимости и нормальности локальных гомеоморфизмов классов Орлича–Соболева**

**Про теореми збіжності та нормальності локальних гомеоморфізмів класів Орліча–Соболева**

**On convergence and normality theorems of local homeomorphisms of Orlicz–Sobolev classes**

Исследуются проблемы, связанные с локальными и предельными свойствами классов Орлича–Соболева конечного искажения, активно изучаемых в последнее время. Показано, что локально равномерным пределом локальных гомеоморфизмов классов Орлича–Соболева является локальный гомеоморфизм, либо постоянная, как только их дилатации удовлетворяют соответствующим ограничениям. Кроме того, при некоторых дополнительных условиях показано, что локально равномерным пределом отображений указанного класса может быть только локальный гомеоморфизм либо постоянная.

Досліджено проблеми, пов'язані з локальними і межовими властивостями класів Орліча–Соболева скінченного спотворення, які активно вивчаються останнім часом. Показано, що локально рівномірною границею локальних гомеоморфізмів класів Орліча–Соболева є локальний гомеоморфізм, або стала, як тільки їх дилатації задовольняють відповідні обмеження. Крім того, за деякими додатковими умовами показано, що локально рівномірною границею відображень вказаного класу може бути тільки локальний гомеоморфізм або стала.

There are investigated problems connected with local and boundary properties of Orlicz–Sobolev classes of finite distortion which are actively studied last time. It is showed that, a locally uniform limit of local homeomorphisms of Orlicz–Sobolev class is a local homeomorphism or a constant whenever it's dilatations satisfy corresponding restrictions. Besides that, at some additional conditions, it is showed that, a locally uniform limit of the mappings mentioned above is a local homeomorphism or a constant.

**1. Введение.** Настоящая заметка посвящена изучению отображений с конечным искажением, активно изучаемых в последнее время (см., напр., [1], [2]–[3] и [4]). В частности, речь идёт об изучении классов Орлича–Соболева, определяющихся как семейства отображений, градиент которых локально принадлежит некоторому классу Орлича. Точнее, пусть  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  – неубывающая функция,  $f$  – локально интегрируемая вектор-функция  $n$  вещественных переменных  $x_1, \dots, x_n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $f_i \in W_{loc}^{1,1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Будем говорить, что  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  принадлежит классу  $W_{loc}^{1,\varphi}$ , пишем  $f \in W_{loc}^{1,\varphi}$ , если

$$\int_G \varphi(|\nabla f(x)|) \, dm(x) < \infty$$

для любой компактной подобласти  $G \subset D$ , где  $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$ . Класс  $W_{loc}^{1,\varphi}$  называется классом *Орлича–Соболева*. Как было показано в одной из совместных работ автора, семейства гомеоморфизмов класса Орлича–Соболева с конечным искажением являются нормальными (равнотепенно непрерывными) при определённых дополнительных условиях на характеристику квазиконформности отображений и количество выпускаемых этими отображениями значений (см., напр., [5, теоремы 7 и 9, следствие 13]). Кроме того, ранее было установлено, что локально равномерным пределом указанных отображений является гомеоморфизм либо постоянная (см. [5, следствие 9] и [6, раздел 4]). В настоящей заметке будет показано, что соответствующие результаты верны также и для аналогичных семейств локальных гомеоморфизмов. Следует отметить, что исследование локальных гомеоморфизмов, не являющихся гомеоморфизмами, требует привлечения существенно иной техники. (Отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  называется здесь и далее локальным гомеоморфизмом, если каждая точка  $x_0 \in D$  имеет окрестность  $U$ , такую что  $f|_U$  является гомеоморфизмом, т.е., взаимнооднозначным отображением, обратное к которому также, как и  $f$ , является непрерывным).

Сформулируем основные утверждения, которые будут доказаны в настоящей работе.

Всюду далее  $D$  – область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $m$  – мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$  и  $\text{dist}(A, B)$  – евклидово расстояние между множествами  $A$  и  $B$  в  $\mathbb{R}^n$ . Запись  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  предполагает, что отображение  $f$  непрерывно в  $D$ . В дальнейшем  $\mathcal{H}^k$  – нормированная  $k$ -мерная мера Хаусдорфа в  $\mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, \quad \mathbb{B}^n := B(0, 1),$$

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \quad \mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1),$$

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$\omega_{n-1}$  обозначает площадь единичной сферы  $\mathbb{S}^{n-1}$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega_n$  – объём единичного шара  $\mathbb{B}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ . В дальнейшем  $J(x, f) = \det f'(x)$  – *якобиан отображения*  $f$  в точке  $x$ , где  $f'(x)$  – *матрица Якоби* отображения  $f$  в точке  $x$ .

Отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется *отображением с конечным искажением*, пишем  $f \in FD$ , если  $f \in W_{loc}^{1,1}(D)$  и для некоторой функции  $K(x) : D \rightarrow [1, \infty)$  выполнено условие  $\|f'(x)\|^n \leq K(x) \cdot |J(x, f)|$  при почти всех  $x \in D$  (см. [1, п. 6.3, гл. VI]. Для

отображений с конечным искажением корректно определена и почти всюду конечна так называемая *внешняя дилатация*  $K_O(x, f)$  отображения  $f$  в точке  $x$ , определяемая соотношением

$$K_O(x, f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (1)$$

Для отображения  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , множества  $E \subset D$  и  $y \in \mathbb{R}^n$ , определим *функцию кратности*  $N(y, f, E)$  как число прообразов точки  $y$  во множестве  $E$ , т.е.

$$N(y, f, E) = \text{card} \{x \in E : f(x) = y\}, \quad N(f, E) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, E). \quad (2)$$

Пусть  $(X, d)$  и  $(X', d')$  – метрические пространства с расстояниями  $d$  и  $d'$  соответственно. Семейство  $\mathfrak{F}$  непрерывных отображений  $f : X \rightarrow X'$  называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений  $f_m \in \mathfrak{F}$  можно выделить подпоследовательность  $f_{m_k}$ , которая сходится локально равномерно в  $X$  к непрерывной функции  $f : X \rightarrow X'$ .

Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство  $\mathfrak{F}$  отображений  $f : X \rightarrow X'$  называется *равностепенно непрерывным в точке*  $x_0 \in X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$  такое, что  $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  для всех  $x$  таких, что  $d(x, x_0) < \delta$  и для всех  $f \in \mathfrak{F}$ . Говорят, что  $\mathfrak{F}$  *равностепенно непрерывно*, если  $\mathfrak{F}$  равностепенно непрерывно в каждой точке  $x_0 \in X$ . Согласно одной из версий теоремы Арцела-Асколи (см., напр., [7, пункт 20.4]), если  $(X, d)$  – сепарабельное метрическое пространство, а  $(X', d')$  – компактное метрическое пространство, то семейство  $\mathfrak{F}$  отображений  $f : X \rightarrow X'$  нормально тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{F}$  равностепенно непрерывно.

Отметим, что всюду далее, если не оговорено противное,  $(X, d) = (D, |\cdot|)$ , где  $D$  – область в  $\mathbb{R}^n$ , а  $|\cdot|$  – евклидова метрика,  $|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ;  $(X', d') = (\overline{\mathbb{R}^n}, h)$ , где  $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ,  $h$  – хордальная метрика,

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

При заданном множестве  $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  полагаем  $h(E) = \sup_{x, y \in E} h(x, y)$  – хордальный диаметр множества  $E$ .

Для заданного числа  $\delta > 0$ , неубывающей функции  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , измеримой по Лебегу функции  $Q : D \rightarrow [1, \infty]$  и числа  $N \in \mathbb{N}$  обозначим символом  $\mathfrak{R}_{\varphi, Q, N, \delta}$  семейство всех локальных гомеоморфизмов  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  класса  $W_{loc}^{1, \varphi}$ , имеющих конечное искажение, таких что  $N(f, D) \leq N$ ,  $K_O^{n-1}(x, f) \leq Q(x)$  и  $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \delta$ . Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $n \geq 3$ , тогда семейство отображений  $\mathfrak{R}_{\varphi, Q, N, \delta}$  является равностепенно непрерывным в некоторой фиксированной точке  $x_0 \in D$ , если  $Q \in L_{loc}^1(D)$ ,

$$\int_1^\infty \left[ \frac{t}{\varphi(t)} \right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \quad (3)$$

и, кроме того, при некотором  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 < \text{dist}(x_0, \partial D)$ , выполнено следующее условие расходимости интеграла:

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty, \quad (4)$$

где, как обычно,  $q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-x_0|=r} Q(x) d\mathcal{H}^{n-1}$  – среднее интегральное значение функции  $Q$  над сферой  $S(x_0, r)$ . В частности, заключение теоремы 1 является верным, если  $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$  при  $r \rightarrow 0$ .

Из приведённого выше критерия Арцела-Асколи вытекает следующее

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1 семейство отображений  $\mathfrak{R}_{\varphi, Q, N, \delta}$  является нормальным семейством отображений, как только условие (4) выполнено в каждой точке  $x_0$  области  $D$ .

Сформулируем ещё один важнейший результат работы.

Будем говорить, что локально интегрируемая функция  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  имеет *конечное среднее колебание* в точке  $x_0 \in D$ , пишем  $\varphi \in FMO(x_0)$ , если  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty$ , где  $\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)$ . Заметим, что, как известно,  $\Omega_n \varepsilon^n = m(B(x_0, \varepsilon))$ . Имеет место следующая

**Теорема 2.** При  $n \geq 3$  семейство отображений  $\mathfrak{R}_{\varphi, Q, N, \delta}$  является равномерно непрерывным в точке  $x_0 \in D$ , если выполнено условие (3) и, кроме того,  $Q \in FMO(x_0)$ .

Из теоремы 2 на основании приведённого выше критерия Арцела-Асколи вытекает следующее

**Следствие 2.** В условиях теоремы 2 семейство отображений  $\mathfrak{R}_{\varphi, Q, N, \delta}$  является нормальным семейством отображений, как только условие  $Q \in FMO(x_0)$  выполнено в каждой точке  $x_0$  области  $D$ .

Ещё одно важное утверждение, которое будет доказано в настоящей работе, может быть сформулировано следующим образом.

**Теорема 3.** Пусть  $n \geq 3$ ,  $f_m$  – последовательность локальных гомеоморфизмов класса  $W_{loc}^{1, \varphi}$ , имеющих конечное искажение, таких что  $N(f, D) \leq N$ ,  $K_O^{n-1}(x, f) \leq Q(x)$ , где  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  – неубывающая функция,  $Q : D \rightarrow [1, \infty]$  – измеримая по Лебегу функция, а  $N \in \mathbb{N}$  – некоторое фиксированное число. Если последовательность  $f_m$  сходится локально равномерно по метрике  $h$  к отображению  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ , функция  $\varphi$  удовлетворяет условию (3), а функция  $Q$  в каждой точке  $x_0 \in D$  удовлетворяет одному из условий: (4) либо  $Q \in FMO(x_0)$ , то тогда либо  $f$  – локальный гомеоморфизм из  $D$  в  $\mathbb{R}^n$ , либо  $f$  – постоянная из  $D$  в  $\overline{\mathbb{R}^n}$ .

**2. Вспомогательные результаты.** Следует отметить, что доказательство основных результатов работы опирается на некоторый аппарат, на первый взгляд, не связанный с классами Орлича и Орлича–Соболева. Речь идёт о так называемых нижних  $Q$ -отображениях и кольцевых  $Q$ -отображениях (см., напр., [2]). Напомним некоторые

определения, связанные с понятием поверхности, интеграла по поверхности, а также модулей семейств кривых и поверхностей.

Пусть  $\omega$  – открытое множество в  $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Непрерывное отображение  $S : \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  будем называть *k-мерной поверхностью*  $S$  в  $\mathbb{R}^n$ . Число прообразов

$$N(y, S) = \text{card } S^{-1}(y) = \text{card } \{x \in \omega : S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

будем называть *функцией кратности* поверхности  $S$ . Другими словами,  $N(y, S)$  – кратность накрытия точки  $y$  поверхностью  $S$ . Пусть  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  – борелевская функция, в таком случае интеграл от функции  $\rho$  по поверхности  $S$  определяется равенством:

$$\int_S \rho d\mathcal{A} := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) N(y, S) d\mathcal{H}^k y.$$

Пусть  $\Gamma$  – семейство  $k$ -мерных поверхностей  $S$ . Борелевскую функцию  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  будем называть *допустимой* для семейства  $\Gamma$ , сокр.  $\rho \in \text{adm } \Gamma$ , если

$$\int_S \rho^k d\mathcal{A} \geq 1 \tag{5}$$

для каждой поверхности  $S \in \Gamma$ . Для заданного числа  $p \in (0, \infty)$  *p-модулем* семейства  $\Gamma$  назовём величину

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x).$$

Мы также полагаем  $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$ , а величину  $M(\Gamma)$  в этом случае называем *модулем семейства*  $\Gamma$ . Заметим, что модуль семейств поверхностей, определённый таким образом, представляет собой внешнюю меру в пространстве всех  $k$ -мерных поверхностей (см. [8]).

Пусть  $p \geq 1$ . Говорят, что некоторое свойство  $P$  выполнено для *p-почти всех поверхностей* области  $D$ , если оно имеет место для всех поверхностей, лежащих в  $D$ , кроме, быть может, некоторого их подсемейства,  $p$ -модуль которого равен нулю. (Как правило, если речь идёт о конформном модуле, говорят, что указанное свойство выполнено для *почти всех поверхностей* области  $D$ , опуская приставку "n" в выражении "n-почти всех"). В частности, говорят, что некоторое свойство выполнено для *p-почти всех кривых* области  $D$ , если оно имеет место для всех кривых, лежащих в  $D$ , кроме, быть может, некоторого их подсемейства,  $p$ -модуль которого равен нулю.

Будем говорить, что измеримая по Лебегу функция  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  *p-обобщённо допустима* для семейства  $\Gamma$   $k$ -мерных поверхностей  $S$  в  $\mathbb{R}^n$ , сокр.  $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$ , если соотношение (5) выполнено для  $p$ -почти всех поверхностей  $S$  семейства  $\Gamma$ . *Обобщённый p-модуль*  $\overline{M}_p(\Gamma)$  семейства  $\Gamma$  определяется равенством

$$\overline{M}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x),$$

где точная нижняя грань берётся по всем функциям  $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$ . В случае  $p = n$  мы используем обозначения  $\overline{M}(\Gamma)$  и  $\rho \in \text{ext } \text{adm } \Gamma$ , соответственно. Очевидно, что при

каждом  $p \in (0, \infty)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , и каждого семейства  $k$ -мерных поверхностей  $\Gamma$  в  $\mathbb{R}^n$ , выполнено равенство  $\overline{M}_p(\Gamma) = M_p(\Gamma)$ .

Следующий класс отображений представляет собой обобщение квазиконформных отображений в смысле кольцевого определения по Герингу ([9]) и отдельно исследуется различными авторами (см., напр., [2, глава 9]). Пусть  $D$  и  $D'$  – заданные области в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$  и  $Q : D \rightarrow (0, \infty)$  – измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что  $f : D \rightarrow D'$  – *нижнее  $Q$ -отображение в точке  $x_0$* , как только

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \inf_{\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon} \int_{D \cap R_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)} dm(x) \quad (6)$$

для каждого кольца  $A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)$ ,  $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$ ,  $d_0 = \sup_{z \in D} |z - x_0|$ , где  $\Sigma_\varepsilon$  обозначает семейство всех пересечений сфер  $S(x_0, r)$  с областью  $D$ ,  $r \in (0, \varepsilon_0)$ . Примеры таких отображений несложно указать (см. теорему 4 ниже).

Отметим, что выражения ”почти всех кривых” и ”почти всех поверхностей” в отдельных случаях могут иметь две различные интерпретации (в частности, если речь идёт о семействе сфер, то ”почти всех” может пониматься как относительно множества значений  $r$ , так и конформного модуля семейства сфер, рассматриваемого как частный случай семейства поверхностей). Следующее утверждение вносит некоторую ясность между указанными интерпретациями и может быть установлено полностью по аналогии с [2, лемма 9.1].

**Лемма 1.** Пусть  $x_0 \in D$ . Если некоторое свойство  $P$  имеет место для почти всех сфер  $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ , где ”почти всех” понимается в смысле модуля семейств поверхностей, то  $P$  также имеет место для почти всех сфер  $D(x_0, r)$  относительно линейной меры Лебега по параметру  $r \in \mathbb{R}$ . Обратно, пусть  $P$  имеет место для почти всех сфер  $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$  относительно линейной меры Лебега по  $r \in \mathbb{R}$ , тогда  $P$  также имеет место для почти всех поверхностей  $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$  в смысле модуля семейств поверхностей.

Следующее утверждение облегчает проверку бесконечной серии неравенств в (6) и может быть установлено аналогично доказательству [2, теорема 9.2].

**Лемма 2.** Пусть  $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$  и  $Q : D \rightarrow (0, \infty)$  – измеримая по Лебегу функция. Отображение  $f : D \rightarrow D'$  является нижним  $Q$ -отображением в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 \in (0, d_0),$$

где, как и выше,  $\Sigma_\varepsilon$  обозначает семейство всех пересечений сфер  $S(x_0, r)$  с областью  $D$ ,  $r \in (0, \varepsilon_0)$ ,

$$\|Q\|_{n-1}(r) = \left( \int_{D(x_0, r)} Q^{n-1}(x) d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

–  $L_{n-1}$ -норма функции  $Q$  над сферой  $D(x_0, r) = \{x \in D : |x - x_0| = r\} = D \cap S(x_0, r)$ .

Напомним, что *конденсатором* называют пару  $E = (A, C)$ , где  $A$  – открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ , а  $C$  – компактное подмножество  $A$ . *Ёмкостью* конденсатора  $E$  называется следующая величина:

$$\text{cap } E = \text{cap } (A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u(x)|^n dm(x), \quad (7)$$

где  $W_0(E) = W_0(A, C)$  – семейство неотрицательных непрерывных функций  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  с компактным носителем в  $A$ , таких что  $u(x) \geq 1$  при  $x \in C$  и  $u \in ACL$ . В формуле (7), как обычно,  $|\nabla u| = \left( \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 \right)^{1/2}$ .

Следующее утверждение имеет важное значение для доказательства многих результатов настоящей работы (см. [10, предложение 10.2, гл. II]).

**Предложение 1.** Пусть  $E = (A, C)$  – произвольный конденсатор в  $\mathbb{R}^n$  и пусть  $\Gamma_E$  – семейство всех кривых вида  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  таких, что  $\gamma(a) \in C$  и  $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$  для произвольного компакта  $F \subset A$ . Тогда

$$\text{cap } E = M(\Gamma_E).$$

В дальнейшем всюду символом  $\Gamma(E, F, D)$  мы обозначаем семейство всех кривых  $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ , которые соединяют  $E$  и  $F$  в  $D$ , т.е.  $\gamma(a) \in E$ ,  $\gamma(b) \in F$  и  $\gamma(t) \in D$  при  $t \in (a, b)$ . Для доказательства основных результатов работы также существенно используются так называемые  $Q$ -отображения, определение которых приведено ниже (см., напр., [2, гл. 7], см. также [4] и [11]). Говорят, что  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  является *кольцевым  $Q$ -отображением в точке  $x_0 \in D$* , если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|) dm(x)$$

выполнено для любого кольца  $A = A(r_1, r_2, x_0)$ ,  $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \text{dist}(x_0, \partial D)$ , и для каждой измеримой функции  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$  такой, что  $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$ . Отметим, что кольцевые  $Q$ -отображения являются обобщением квазиконформных отображений и отображений с ограниченным искажением (см., напр., [4], [7], [10], [11], [12], [13], [14] и [15]). В частности, ввиду неравенства Е. Полецкого отображения с ограниченным искажением являются кольцевыми  $Q$ -отображениями с некоторой ограниченной функцией  $Q$  (см. [12, теорема 1]). Следующее утверждение было доказано и опубликовано автором данной работы несколько ранее и может быть найдено в [16, теорема 1].

**Лемма 3.** Пусть  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  – измеримая по Лебегу функция,  $Q \in L^1_{loc}(D)$ . Открытое дискретное отображение  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  является кольцевым  $Q$ -отображением в точке  $x_0 \in D$  тогда и только тогда, когда для произвольных  $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial D)$  и произвольного конденсатора  $E = (B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)})$  ёмкость конденсатора

$$f(E) := \left( f(B(x_0, r_2)), f(\overline{B(x_0, r_1)}) \right)$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{cap} f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}},$$

где  $I = I(x_0, r_1, r_2)$  задаётся соотношением

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}.$$

Следующие важные сведения, касающиеся ёмкости пары множеств относительно области, могут быть найдены в работе В. Цимера [17]. Пусть  $G$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  и  $C_0, C_1$  – непересекающиеся компактные множества, лежащие в замыкании  $G$ . Полагаем  $R = G \setminus (C_0 \cup C_1)$  и  $R^* = R \cup C_0 \cup C_1$ . Конформной ёмкостью пары  $C_0, C_1$  относительно замыкания  $G$  называется величина

$$C[G, C_0, C_1] = \inf_R \int |\nabla u|^n dm(x),$$

где точная нижняя грань берётся по всем функциям  $u$ , непрерывным в  $R^*$ ,  $u \in ACL(R)$ , таким что  $u = 1$  на  $C_1$  и  $u = 0$  на  $C_0$ . Указанные функции будем называть *допустимыми* для величины  $C[G, C_0, C_1]$ . Мы будем говорить, что *множество*  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  *разделяет*  $C_0$  и  $C_1$  в  $R^*$  если  $\sigma \cap R$  замкнуто в  $R$  и найдутся непересекающиеся множества  $A$  и  $B$ , являющиеся открытыми в  $R^* \setminus \sigma$ , такие что  $R^* \setminus \sigma = A \cup B$ ,  $C_0 \subset A$  и  $C_1 \subset B$ . Пусть  $\Sigma$  обозначает класс всех множеств, разделяющих  $C_0$  и  $C_1$  в  $R^*$ . Для числа  $n' = n/(n-1)$  определим величину

$$\widetilde{M}_{n'}(\Sigma) = \inf_{\rho \in \widetilde{\operatorname{adm}} \Sigma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{n'} dm(x) \quad (8)$$

где запись  $\rho \in \widetilde{\operatorname{adm}} \Sigma$  означает, что  $\rho$  – неотрицательная борелевская функция в  $\mathbb{R}^n$  такая, что

$$\int_{\sigma \cap R} \rho d\mathcal{H}^{n-1} \geq 1 \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (9)$$

Заметим, что согласно результату Цимера,

$$\widetilde{M}_{n'}(\Sigma) = C[G, C_0, C_1]^{-1/(n-1)}, \quad (10)$$

см. [17, теорема 3.13]. Заметим также, что согласно результату Хессе

$$M(\Gamma(E, F, D)) = C[D, E, F], \quad (11)$$

как только  $(E \cap F) \cap \partial D = \emptyset$ , см. [18, теорема 5.5].

Сформулируем и докажем следующие утверждения.

**Лемма 4.** Пусть  $x_0 \in D$  и  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  – локально интегрируемая в степени  $n-1$  в  $D$  функция. Если  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  – локальный нижний  $Q$ -гомеоморфизм в точке  $x_0$ , то  $f$  является кольцевым  $Q^*$ -отображением в этой же точке при  $Q^* = Q^{n-1}$ .



*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in D$ ,  $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial D)$ . Без ограничения общности, мы можем считать, что  $f(x_0) \neq \infty$ . Согласно лемме 3 достаточно установить, что

$$\text{cap } f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{*n-1}}$$

где  $E$  – конденсатор вида  $E = (B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)})$ ,  $\omega_{n-1}$  – площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ ,  $q_{x_0}^*(r)$  – среднее значение функции  $Q^{n-1}(x)$  над сферой  $|x - x_0| = r$  и  $I^* = I^*(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{*\frac{1}{n-1}}(r)}$ . Зафиксируем  $\varepsilon \in (r_1, r_2)$  и рассмотрим шар  $B(x_0, \varepsilon)$ . Полагаем  $C_0 = \partial f(B(x_0, r_2))$ ,  $C_1 = f(\overline{B(x_0, r_1)})$ ,  $\sigma = \partial f(B(x_0, \varepsilon))$ . Поскольку  $\overline{B(x_0, r_2)}$  – компакт в  $D$ , найдётся шар  $B(x_0, R)$  такой, что  $\overline{f(B(x_0, r_2))} \subset B(x_0, R)$ . Полагаем  $G := B(x_0, R)$ .

Поскольку  $f$  – локальный гомеоморфизм,  $\overline{f(B(x_0, r_1))}$  – компактное подмножество  $f(B(x_0, \varepsilon))$  также, как  $\overline{f(B(x_0, \varepsilon))}$  – компактное подмножество  $f(B(x_0, r_2))$ . В частности,  $\overline{f(B(x_0, r_1))} \cap \partial f(B(x_0, \varepsilon)) = \emptyset$ . Пусть, как и выше,  $R = G \setminus (C_0 \cup C_1)$  и  $R^* = R \cup C_0 \cup C_1$ , тогда  $R^* := G$ . Заметим, что  $\sigma$  разделяет  $C_0$  и  $C_1$  в  $R^* = G$ . Действительно, множество  $\sigma \cap R$  замкнуто в  $R$ , кроме того, пусть  $A := G \setminus \overline{f(B(x_0, \varepsilon))}$  и  $B = f(B(x_0, \varepsilon))$ , тогда  $A$  и  $B$  открыты в  $G \setminus \sigma$ ,  $C_0 \subset A$ ,  $C_1 \subset B$  и  $G \setminus \sigma = A \cup B$ .

Пусть  $\Sigma$  – семейство всех множеств, отделяющих  $C_0$  от  $C_1$  в  $G$ . Поскольку для открытых отображений  $\partial f(O) \subset f(\partial O)$ , где  $O$  – компактная подобласть  $D$ , мы получим:  $\partial f(B(x_0, r)) \subset f(\partial B(x_0, r))$ ,  $r \in (0, \text{dist}(x_0, \partial D))$ .

Пусть  $\rho^{n-1} \in \widetilde{\text{adm}} \bigcup_{r=r_1}^{r_2} \partial f(B(x_0, r))$  в смысле соотношения (9), тогда также  $\rho \in \text{adm} \bigcup_{r=r_1}^{r_2} \partial f(B(x_0, r))$  в смысле соотношения (5). Поскольку (ввиду открытости отображения  $f$ ) имеет место включение  $\partial f(B(x_0, r)) \subset f(S(x_0, r))$ , мы получим, что  $\rho \in \text{adm} \bigcup_{r=r_1}^{r_2} f(S(x_0, r))$  и, следовательно, ввиду (8) будем иметь

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{n'}(\Sigma) &\geq \widetilde{M}_{n'} \left( \bigcup_{r=r_1}^{r_2} \partial f(B(x_0, r)) \right) \geq M \left( \bigcup_{r=r_1}^{r_2} \partial f(B(x_0, r)) \right) \geq \\ &\geq M \left( \bigcup_{r=r_1}^{r_2} f(S(x_0, r)) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Однако, ввиду (10) и (11),

$$\widetilde{M}_{n'}(\Sigma) = \frac{1}{(M(\Gamma(C_0, C_1, G)))^{1/(n-1)}}. \quad (13)$$

Пусть  $\Gamma_{f(E)}$  – семейство всех кривых для конденсатора  $f(E)$  в обозначениях предложения 1. Пусть также  $\Gamma_{f(E)}^*$  обозначает семейство всех спрямляемых кривых семейства  $\Gamma_{f(E)}$ , тогда заметим, что семейства  $\Gamma_{f(E)}^*$  и  $\Gamma(C_0, C_1, G)$  имеют одинаковые семейства допустимых метрик  $\rho$  и, значит,

$$M(\Gamma_{f(E)}) = M(\Gamma(C_0, C_1, G)).$$

Из (13) и предложения 1 мы получим, что

$$\widetilde{M}^{n-1}(\Sigma) = \frac{1}{\text{cap } f(E)}. \quad (14)$$

Окончательно, из (12) и (14) мы получаем неравенство

$$\text{cap } f(E) \leq \frac{1}{M \left( \bigcup_{r=r_1}^{r_2} f(S(x_0, r)) \right)^{n-1}}. \quad (15)$$

По лемме 2 и из (15) мы получим, что

$$\text{cap } f(E) \leq \frac{1}{\left( \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)} \right)^{n-1}} = \frac{\omega_{n-1}}{I^{*n-1}},$$

что и доказывает утверждение леммы 4.  $\square$

Напомним, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  между пространствами с мерами  $(X, \Sigma, \mu)$  и  $(Y, \Sigma', \mu')$  обладает  $N$ -свойством (Лузина), если из условия  $\mu(S) = 0$  следует, что  $\mu'(f(S)) = 0$ . Следующее вспомогательное утверждение получено в работе [5] (см. теорема 1 и следствие 2).

**Предложение 2.** Пусть  $D$  – область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ ,  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  – неубывающая функция, удовлетворяющая условию (3). Тогда:

1) Если  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  – непрерывное открытое отображение класса  $W_{loc}^{1,\varphi}(D)$ , то  $f$  имеет почти всюду полный дифференциал в  $D$ ;

2) Любое непрерывное отображение  $f \in W_{loc}^{1,\varphi}$  обладает  $N$ -свойством относительно  $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах  $S(x_0, r)$  с центром в заданной предписанной точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Кроме того, на почти всех таких сферах  $S(x_0, r)$  выполнено условие  $\mathcal{H}^{n-1}(f(E)) = 0$ , как только  $|\nabla f| = 0$  на множестве  $E \subset S(x_0, r)$ . (Здесь "почти всех" понимается относительно линейной меры Лебега по параметру  $r$ ).

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть  $D$  – область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ ,  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  – неубывающая функция, удовлетворяющая условию (3). Если  $n \geq 3$ , то каждый локальный гомеоморфизм  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  с конечным искажением класса  $W_{loc}^{1,\varphi}$  такой, что  $N(f, D) < \infty$ , является нижним  $Q$ -отображением в каждой точке  $x_0 \in \overline{D}$  при  $Q(x) = N(f, D) \cdot K_O(x, f)$ , где внешняя дилатация  $K_O(x, f)$  отображения  $f$  в точке  $x$  определена соотношением (1), а кратность  $N(f, D)$  определена соотношением (2).

*Доказательство.* Заметим, что  $f$  дифференцируемо почти всюду ввиду предложения 2. Пусть  $B$  – борелево множество всех точек  $x \in D$ , в которых  $f$  имеет полный дифференциал  $f'(x)$  и  $J(x, f) \neq 0$ . Применяя теорему Кирсбрауна и свойство единственности аппроксимативного дифференциала (см. [19, пункты 2.10.43 и 3.1.2]), мы видим, что множество  $B$  представляет собой не более чем счётное объединение борелевских множеств  $B_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , таких, что сужения  $f_l = f|_{B_l}$  являются билипшецевыми

гомеоморфизмами (см., напр., [19, пункты 3.2.2, 3.1.4 и 3.1.8]). Без ограничения общности, мы можем полагать, что множества  $B_l$  попарно не пересекаются. Обозначим также символом  $B_*$  множество всех точек  $x \in D$ , в которых  $f$  имеет полный дифференциал, однако,  $f'(x) = 0$ .

Ввиду построения, множество  $B_0 := D \setminus (B \cup B_*)$  имеет лебегову меру нуль. Следовательно, по [2, теорема 9.1],  $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$  для почти всех сфер  $S_r := S(x_0, r)$  с центром в точке  $x_0 \in \overline{D}$ , где "почти всех" следует понимать в смысле конформного модуля семейств поверхностей. По лемме 1 также  $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$  при почти всех  $r \in \mathbb{R}$ .

Ввиду предложения 2 из условия  $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$  для почти всех  $r \in \mathbb{R}$  вытекает, что  $\mathcal{H}^{n-1}(f(B_0 \cap S_r)) = 0$  для почти всех  $r \in \mathbb{R}$ . По этому предложению также  $\mathcal{H}^{n-1}(f(B_* \cap S_r)) = 0$ , поскольку  $f$ -отображение с конечным искажением и, значит,  $\nabla f = 0$  почти всюду, где  $J(x, f) = 0$ .

Пусть  $\Gamma$  – семейство всех пересечений сфер  $S_r$ ,  $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$ , с областью  $D$ . Для заданной функции  $\rho_* \in \text{adm } f(\Gamma)$ ,  $\rho_* \equiv 0$  вне  $f(D)$ , полагаем  $\rho \equiv 0$  вне  $D$  и на  $B_0$ ,

$$\rho(x) := \rho_*(f(x)) \|f'(x)\| \quad \text{при } x \in D \setminus B_0.$$

Пусть  $D_r^* \in f(\Gamma)$ ,  $D_r^* = f(D \cap S_r)$ . Заметим, что

$$D_r^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} f(S_r \cap B_i) \bigcup f(S_r \cap B_*),$$

и, следовательно, для почти всех  $r \in (0, \varepsilon_0)$

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{D_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathcal{A}_* \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{f(S_r \cap B_i)} \rho_*^{n-1}(y) N(y, S_r \cap B_i) d\mathcal{H}^{n-1}y + \\ &+ \int_{f(S_r \cap B_*)} \rho_*^{n-1}(y) N(y, S_r \cap B_*) d\mathcal{H}^{n-1}y. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая доказанное выше, из (16) мы получаем, что

$$1 \leq \int_{D_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathcal{A}_* \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f(S_r \cap B_i)} \rho_*^{n-1}(y) N(y, S_r \cap B_i) d\mathcal{H}^{n-1}y \quad (17)$$

для почти всех  $r \in (0, \varepsilon_0)$ . Рассуждая покусочно на  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , ввиду [19, 1.7.6 и теорема 3.2.5] мы получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{B_i \cap S_r} \rho^{n-1} d\mathcal{A} &= \int_{B_i \cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A} = \\ &= \int_{B_i \cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{\|f'(x)\|^{n-1}}{\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}} \cdot \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}} d\mathcal{A} \geq \int_{B_i \cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}} d\mathcal{A} = \end{aligned}$$

$$= \int_{f(B_i \cap S_r)} \rho_*^{n-1} N(y, S_r \cap B_i) d\mathcal{H}^{n-1} y \quad (18)$$

для почти всех  $r \in (0, \varepsilon_0)$ . Из (17) и (18) вытекает, что  $\rho \in \text{ext adm } \Gamma$ .

Замена переменных на каждом  $B_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , см., напр., [19, теорема 3.2.5], и свойство счётной аддитивности интеграла приводят к оценке

$$\int_D \frac{\rho^n(x)}{K_O(x, f)} dm(x) \leq \int_{f(D)} N(f, D) \cdot \rho_*^n(y) dm(y),$$

что и завершает доказательство.  $\square$

**3. Доказательство основных результатов.** Следующий результат даже в несколько более общем виде доказан в работе [20, теорема 1].

**Предложение 3.** Пусть  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , – локальный кольцевой  $Q$ -гомеоморфизм в точке  $x_0 = 0$ , такой что  $Q \in L_{loc}^1(\mathbb{B}^n)$ . Если выполнено хотя бы одно из условий: (4), либо  $Q \in FMO(0)$ , то отображение  $f$  инъективно в некотором шаре  $B(0, \delta(n, Q))$ , где  $\delta$  – положительное число, зависящее только от  $n$  и функции  $Q$ .

*Доказательство теорем 1 и 2.* Ввиду леммы 4 и теоремы 4 каждое отображение  $f \in \mathfrak{R}_{\varphi, Q, N, \delta}$  является кольцевым локальным  $Q \cdot N^{n-1}$ -гомеоморфизмом в каждой точке области  $D$ . Ввиду предложения 3 каждая точка имеет окрестность, радиус которой зависит только от  $n$ ,  $Q$  и числа  $N$ , в которой  $f$  является гомеоморфизмом. Необходимое заключение вытекает, в таком случае, из результатов, полученных для  $Q$ -гомеоморфизмов ранее (см. [21, теоремы 4.1–4.2]).  $\square$

*Доказательство теоремы 3.* Ввиду леммы 4 и теоремы 4 каждое отображение  $f_m$  из формулировки теоремы 4 является кольцевым локальным  $Q \cdot N^{n-1}$ -гомеоморфизмом в каждой точке области  $D$ . Пусть  $G$  – произвольная компактная подобласть области  $D$ . Покроем  $\overline{G}$  (возможно) бесконечным числом шаров с центрами во всех точках  $\overline{G}$  и имеющих радиусы, соответствующие утверждению предложения 3 (т.е., радиусы шаров, зависящие только от  $n$ ,  $Q$  и числа  $N$ , в которых отображение  $f_m$  является инъективным). По лемме Гейне–Бореля–Лебега можно ограничиться лишь конечным набором таких шаров. Заметим, что ввиду [6, теоремы 4.1–4.2] предельное отображение  $f$  является гомеоморфизмом либо постоянной в каждом таком шаре. Пусть  $f$  постоянна в каком либо шаре  $B_1$ , тогда из связности  $\overline{G}$  вытекает, что этот шар пересекается по крайней мере ещё с одним шаром  $B_2$ , т.о.,  $f \equiv \text{const}$  в  $B_2$  и т.д. Продолжая этот процесс, мы приходим к заключению, что в этом случае  $f \equiv \text{const}$  в  $\overline{G}$ . Устроив исчерпание области  $D$  компактными подобластями  $G$ , мы можем заключить, что  $f$  постоянно в  $D$ . Пусть теперь  $f$  – локальный гомеоморфизм в каждом шаре указанного выше покрытия, тогда, очевидно,  $f$  – локальный гомеоморфизм в  $G$  и, значит,  $f$  – локальный гомеоморфизм в  $D$ , что и требовалось установить.  $\square$

## Список литературы

- [1] Iwaniec T. and Martin G. Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 552 p.

- [2] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
- [3] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215–236.
- [4] *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach. – Developments in Mathematics, vol. 26. New York etc.: Springer, 2012.
- [5] *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* К теории классов Орлича–Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 6. – С. 50–102.
- [6] *Ryazanov V., Salimov R., Sevost'yanov E.* On Convergence Analysis of Space Homeomorphisms // Siberian Advances in Mathematics. – 2013. – **23**, no. 4. – P. 263–293.
- [7] *Väisälä J.* Lectures on  $n$ -Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. **229**, Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.
- [8] *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.
- [9] *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.
- [10] *Rickman S.* Quasiregular mappings. – Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [11] *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. J. Math. and Math. Scie. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
- [12] *Полецкий Е.А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Матем. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 261–272.
- [13] *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. матем. ж. – 1967. – **8**, № 3. – С. 629–658.
- [14] *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
- [15] *Vuorinen M.* Conformal Geometry and Quasiregular Mappings. – Lecture Notes in Math. **1319**, Berlin etc.: Springer–Verlag, 1988.
- [16] *Севостьянов Е.А.* Об интегральной характеристике некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. матем. ж. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1367–1380.
- [17] *Zierner W.P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **126**, no. 3. – P. 460–473.
- [18] *Hesse J.* A  $p$ -extremal length and  $p$ -capacity equality // Ark. Mat. – 1975. – **13**. – P. 131–144.
- [19] *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – Москва: Наука, 1987.

- [20] *Гольберг А. и Севостьянов Е.* О радиусе инъективности обобщённых квазиизометрий в пространстве размерности больше двух // Укр. матем. ж. (принята к публикации).
- [21] *Рязанов В.И. и Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых  $Q$ -гомеоморфизмов // Сиб. матем. ж. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361–1376.

## КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

**Евгений Александрович Севостьянов**

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

83 114 Украина, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 74,

тел. +38 (066) 959 50 34 (моб.), +38 (062) 311 01 45 (раб.), e-mail: brusin2006@rambler.ru, esevostyanov2009@mail.ru